This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

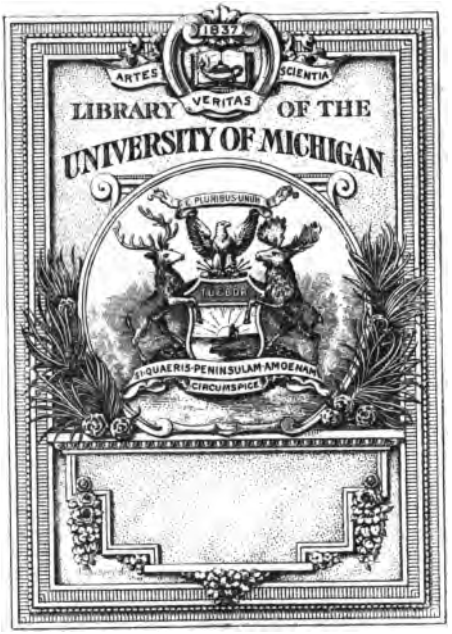
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

A 594772 DUPL


1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

QC
385
.R44

THEORIE

DER

CYLINDERLINSEN.

GENERAL LIBRARY
University of
MICHIGAN

THEORIE

DER

CYLINDERLINSEN

VON

F. E. REUSCH,
PROFESSOR DER PHYSIK IN TÜBINGEN.

MIT ZWEI AUF STEIN GRAVIRTEN TAFELN.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1868.

VORREDE.

Die Wichtigkeit, welche die Cylinderlinsen, als Hülfsmittel gegen den Astigmatismus, in der neueren Augenheilkunde erlangt haben, wird es wohl rechtfertigen, wenn der Gang des Lichts durch derartige Linsen genauer untersucht wird. Zwar liesse sich Alles, was in dieser Beziehung zu sagen ist, leicht ableiten aus den Resultaten der bekannten Arbeit von Sturm (Mémoire sur la théorie de la vision, Comptes rendus. T. 20. p. 554. 761. 1238); es ist aber auch denkbar, dass Manchen eine directe und etwas mehr elementare Behandlung des Gegenstandes erwünscht sein könnte; jedenfalls wird die geometrische Optik diese Linsen in Zukunft nicht wie bisher ignoriren dürfen. Dadurch, dass ich von einer möglichst allgemeinen, den verschiedenen Fällen und Formen der Praxis leicht anzupassenden Gestalt der Linse ausgegangen bin, habe ich den Gegenstand mit einer gewissen Allgemeinheit behandeln und Wiederholungen ziemlich vermeiden können.

Bei den Figuren habe ich, soweit es passend schien, die Methode der descriptiven Geometrie benutzt, welche bekanntlich Punkte und Linien im Raum durch ihre Projectionen in zwei rechtwinkliche Ebenen darstellt, welche um ihren Durchschnitt in dieselbe Ebene, die der Zeichnung, umgeklappt sind. Diese Darstellungsweise wird, wie mir scheint, viel zu selten angewendet. Diejenigen, die gar

nicht damit vertraut sind, möchte ich bitten, etwa die ersten Seiten des vortrefflichen Lehrbuchs von B. Gugler (zweite Auflage) zu lesen.

Eine andere Behandlung des Gegenstandes als die analytische ist kaum denkbar; die synthetische Methode schleppt sich mühsam von einer Linsenform zur andern, lässt die allgemeinen Eigenschaften nur schwer erkennen und giebt keine Sicherheit in der praktischen Anwendung. Ich habe mir aber alle Mühe gegeben, die Resultate der Rechnung graphisch zu verwerthen und zu klarer Anschauung zu bringen, so dass ich hoffen kann, auch diejenigen werden einigen Nutzen aus dem Büchlein ziehen, welche sich blos an die Resultate halten.

Schliesslich bemerke ich, dass ich meinem hochverehrten Collegen C. Neumann einige werthvolle Andeutungen verdanke.

Tübingen, 4. Mai 1868.

Der Verfasser.

INHALTSVERZEICHNISS.

Kapitel I. Allgemeines.

Seite

§. 1. Das Brechungsgesetz 1
§. 2. Die Linsen 2
§. 3. Brechung des Lichts an paraboloidischen Flächen 4

Kapitel II. Paraboloidische Linse, an welcher die Hauptschnitte der Grenzflächen zusammenfallen.

§. 4. Verfolgung eines einzelnen Strahls 8
§. 5. Brechung eines homocentrischen Strahlenbüschels, dessen Centrum auf der Linsenachse liegt 10
§. 6. Brechung eines Strahlenbüschels, dessen Centrum ausserhalb der Linsenachse liegt 13

Kapitel III. Paraboloidische Linse, an welcher die Hauptschnitte der Grenzflächen einen beliebigen Winkel bilden.

§. 7. Verfolgung eines einzelnen Strahls 16
§. 8. Das Centrum eines Strahlenbüschels liegt auf der Linsenachse 18
§. 9. Das Centrum eines Strahlenbüschels liegt ausserhalb der Linsenachse 20

Kapitel IV. Die Cylinderlinsen.

§. 10. Uebergang von paraboloidischen Grenzflächen zu cylindrischen 22
§. 11. Die Cylinderachsen sind parallel 23
§. 12. Die Cylinderachsen sind rechtwinklich gekreuzt 24
§. 13. Sphärisch-cylindrische Gläser 25
§. 14. Die astigmatische Linse von Stokes 26
§. 15. Stigmatismus 29

Erstes Kapitel.

Allgemeines.

§ 1.

Das Brechungsgesetz.

Ein Lichtstrahl LM (Fig. 1) treffe einen durch eine beliebige Fläche GG begrenzten Glaskörper; n sei der Brechungsexponent des Lichts für den Uebergang von Luft in Glas, MN die Normale der Fläche im Einfallspunkte M; alsdann bestimmt sich der gebrochene Lichtstrahl MB durch folgende Construction: auf LM oder seiner Verlängerung nehme man einen beliebigen Punkt A, mache $MA' = n \,.\, MA$, ziehe durch A eine Parallele mit MN und durchschneide die Parallele mit einer Kugel, deren Mittelpunkt M und Halbmesser MA' ist; der Schnittpunkt B mit M verbunden liefert den zu LM gehörigen gebrochenen Strahl MB. In Fig. 2 sei $L'M'$ ein Lichtstrahl der durch die beliebig gestaltete Grenzfläche $G'G'$ eines Glaskörpers in die Luft austritt; $M'N'$ sei die Normale in M'; der Brechungsexponent ist $\frac{1}{n}$, sofern dasselbe Licht und Glas vorausgesetzt wird. Die Richtung $M'C$ des gebrochenen Strahls wird gefunden dadurch, dass man einen beliebigen Punkt B des Strahls $L'M'$ nimmt, $M'B' = \frac{1}{n} M'B$ macht, durch B eine Parallele mit $M'N'$ zieht und die Parallele durch eine Kugel aus M' vom Halbmesser $M'B'$ durchschneidet.

Es sei nun GG' (Fig. 3) ein Glaskörper, welcher zu beiden Seiten durch die beliebigen Flächen OG, $O'G'$ begrenzt

ist, LM ein beliebiger Strahl, dessen Brechung im Glaskörper verfolgt werden soll: man ziehe die Normale MN und bestimme mit Hülfe eines beliebigen Punkts A des einfallenden Strahls nach Fig. 1 den zugehörigen Punkt B; der erstmals gebrochene Strahl MB trifft die zweite Grenzfläche in M'. Nun nehme man B als Hülfspunkt für die zweite Brechung an, d. h. leite nach Fig. 2 aus B den Punkt C ab, so ist $M'C$ die Richtung des Strahls nach seinem Durchgang durch den Glaskörper. — Dass diese Constructionen eine einfache Folge des bekannten Brechungsgesetzes sind, leuchtet unmittelbar ein.

§ 2.

Die Linsen.

Die Technik kann ebene, sphärische und cylindrische Grenzflächen herstellen. Ein Glasstück, das durch irgend zwei dieser Gestalten begrenzt ist, kann als Linse aufgefasst werden; von Cylinderlinsen spricht man, wenn wenigstens eine der Grenzflächen cylindrisch ist. Bezeichnet man die genannten drei Gestalten mit e, s, c sofern sie Eintrittsflächen sind, e', s', c' sofern sie Austrittsflächen sind, so erhält man die hier in Betracht kommenden Combinationen cc', (cs', sc') und (ce', ec'). Die sphärischen und cylindrischen Flächen können hiebei convex oder concav sein; die Achsen der Cylinder bei der Combination cc' können parallel sein, sich rechtwinklich kreuzen oder einen beliebigen Winkel bilden. Wir erhalten somit eine ziemlich grosse Zahl verschiedener Cylinderlinsen, und wenn wir ihre Wirkungen dadurch studiren wollten, dass wir zuerst die Brechung an den einzelnen Ein- und Austrittsgestalten untersuchten und nachher die ihrer verschiedenen Combinationen, so würde diess nicht ohne Umwege, jedenfalls aber nur auf Kosten der Uebersichtlichkeit und Eleganz geschehen. Dagegen empfiehlt es sich, eine so allgemeine Form der Linse bei der Untersuchung zu Grund zu legen, dass alle denkbaren Linsen nur Specialfälle dieser Form sind.

Ehe wir aber diese Form feststellen, ist es nöthig gewisse Begriffe, Annahmen und Beschränkungen zu erörtern. Eine Gerade, welche auf beiden Grenzflächen einer Linse senkrecht steht, heissen wir die Achse der Linse. Bei den zweifach cylindrischen Linsen (cc') ist der kürzeste Abstand der Cylinderachsen die Linsenachse, und sie hat somit für gekreuzte oder geneigte Achsen eine ganz bestimmte Lage. Sind aber die Cylinderachsen parallel, so können wir von den unendlich vielen Achsen irgend eine als Linsenachse ansehen; dasselbe gilt von den plancylindrischen Linsen (ce', ec'), wo jede durch die Cylinderachse gehende und zur ebenen Grenzfläche senkrechte Gerade als Linsenachse angesehen werden kann. Bei den sphärisch-cylindrischen Linsen (cs', sc') ist ein Perpendikel vom Kugelmittelpunkt auf die Achse des Cylinders wieder eine Achse von bestimmter Lage.

Wir nehmen nun vor Allem an, dass die Punkte O und O' (Fig. 3), in welchen die Grenzflächen von der Linsenachse Ox getroffen werden, zugleich die Mitten der Grenzflächen seien; der Umfang der Linse selber kann nach Belieben kreisförmig, elliptisch, quadratisch gedacht werden.

Eine weitere Annahme, die wir zu machen genöthigt sind, ist die, dass nur solche einfallende Strahlen LM (Fig. 3) in Betracht gezogen werden, welche sehr nahe bei O einfallen und überdiess sehr kleine Winkel mit der Linsenachse bilden. Diess hat zunächst zur Folge, dass auch der gebrochene Strahl MM' sehr wenig gegen die Achse geneigt ist. Wenn wir aber endlich noch die Voraussetzung hinzufügen, dass die Linsendicke OO' sehr klein sei im Vergleich mit den Halbmessern der Cylinder und Kugeln, so wird auch M' sehr nahe bei O' liegen und auch der Strahl $M'C$ wenig von der Richtung der Linsenachse abweichen.

Als Gestalten der Grenzflächen unsrer allgemeinen Linse nehmen wir nun zwei verschiedene Paraboloide, deren Hauptachsen mit der Linsenachse Ox zusammenfallen und deren Scheitel um die Linsendicke OO' von einander abstehen,

wobei überdiess angenommen werden kann, dass die Hauptschnitte der beiden Paraboloide einen beliebigen Winkel mit einander machen. Für unsern nächsten Zweck genügt es, sich die Paraboloide als elliptische zu denken; es ist aber einleuchtend, dass bei voller Allgemeinheit auch das hyperbolische Paraboloid, bei welchem die zwei Hauptschnittsparabeln ihre Achsen nach entgegengesetzten Seiten wenden, zuzulassen ist.

§ 3.

Brechung des Lichts an paraboloidischen Flächen.

Für ein rechtwinkliches Coordinatensystem, dessen xAchse mit der Linsenachse zusammenfällt, haben wir als Gleichung der paraboloidischen Eintrittsfläche

$$(a) \quad \frac{y^2}{2r} + \frac{z^2}{2r_1} = x.$$

Die Parameter der Hauptschnittsparabeln in xy und xz sind mit r, r_1 bezeichnet, um daran zu erinnern, dass diese Grössen zugleich die Krümmungshalbmesser der Hauptparabeln im Scheitel sind.

Die Gleichungen einer Normalen des Paraboloids in einem beliebigen Punkte $(x_0 y_0 z_0)$, den wir weiterhin als Einfallspunkt eines Strahls auffassen werden, sind

$$(b) \quad \frac{x - x_0}{r} + \frac{y}{y_0} = 1, \quad \frac{x - x_0}{r_1} + \frac{z}{z_0} = 1.$$

Da aber M äusserst nahe bei O liegen soll, so sind $y_0 z_0$ äusserst kleine Grössen, folglich nach (a) noch viel mehr die Abscisse x_0. Setzt man daher in (b) $x_0 = 0$, so erhält man die Gleichungen einer Normalen in der Nähe des Scheitels, nämlich

$$(b_1) \quad \frac{x}{r} + \frac{y}{y_0} = 1, \quad \frac{x}{r_1} + \frac{z}{z_0} = 1.$$

Wir wollen dieses Resultat sofort graphisch verwerthen: in Fig. 4 sei Ox die Linsenachse; die zwei Hauptschnitte xOy, xOz haben wir in der Weise der darstellenden Geometrie um Ox in eine Ebene niedergelgt. Ferner seien $Or = r$,

$Or_1 = r_1$ die Parameter der Hauptparabeln in xy und xz, endlich $Om = y_0$, $Om' = z_0$. Dann besagen die Gleichungen (b_1), dass die Linien mr und $m'r_1$ die Projectionen der Normalen auf die Ebenen xy und xz sind. Streng genommen geht die so bestimmte Gerade nicht durch den Flächenpunkt $(x_0 y_0 z_0)$ sondern durch dessen Projection auf die Berührungsebene im Scheitel; weil aber beide Punkte die Coordinaten $y_0 z_0$ gemein haben und nur ihre Abscissen um eine verschwindende Grösse differiren, so kann ohne Anstand der Punkt (m, m') statt des Flächenpunkts M genommen werden.

Ein zunächst beliebig einfallender Strahl sei bestimmt durch den Einfallspunkt $M(x_0 y_0 z_0)$ und durch einen anderen Punkt $A(x_1\ y_1\ z_1)$ seiner Richtung; wir suchen nach Anleitung von Fig. 1 die Coordinaten $x_2 y_2 z_2$ des Punktes B. Zu diesem Zweck drücken wir die Bedingung, dass $MB = n \,.\, MA$ und dass AB parallel der Normalen MN, deren Gleichungen (b) sind, sein soll, durch die folgenden Gleichungen aus:

$$(c)\quad \begin{cases} (x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2 + (z_2 - z_0)^2 = \\ n^2\left[(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2\right] \\ \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\dfrac{y_0}{r},\ \dfrac{z_2 - z_1}{x_2 - x_1} = -\dfrac{z_0}{r_1}. \end{cases}$$

Weil aber M, A, B alle sehr nahe bei der Achse liegen sollen, somit ihre y und z sehr kleine Grössen sind und x_0 ohnehin verschwindet, während x_1 beliebig und im Allgemeinen endlich, sowie x_2 von derselben Ordnung wie x_1 ist, so reduciren sich die Gleichungen (c) sofort auf die folgenden:

$$(1)\quad x_2 = n x_1,\ y_2 = y_1 - \frac{n-1}{r} x_1 y_0,\ z_2 = z_1 - \frac{n-1}{r_1} x_1 z_0.$$

In unsrer Fig. 4 seien nun $(lm, l'm')$ die Projectionen des einfallenden Strahls LM, (a, a') die Projectionen des Hülfspunkts A, $Ox_1 = x_1$. Die Projectionen (b, b') des Punktes B ergeben sich dann nach den Ausdrücken (1) dadurch, dass man zuerst $Ox_2 = n \,.\, Ox_1$ macht, ein Loth durch

x_2 auf die Achse legt, und dieses Loth durch Linien ab, $a'b'$ schneidet, welche beziehungsweise parallel mit mr und $m'r_1$ gehen. Die gesuchten Projectionen des gebrochenen Strahls sind die Linien mb, $m'b'$. Die Betrachtung der ähnlichen Dreiecke (mOr, $a\omega b$) und ($m'Or_1$, $a'\omega'b'$) führt direct auf die zwei letzten Ausdrücke unter (1).

Die Gleichung des Austrittsparaboloids sei in Beziehung auf ein neues Coordinatensystem $\xi\eta\zeta$, dessen ξAchse mit $O'x$ zusammenfällt,

$$\frac{\eta^2}{2\varrho} + \frac{\zeta^2}{2\varrho_1} = \xi.$$

wo ϱ, ϱ_1 die Krümmungshalbmesser der Hauptparabeln in den Ebenen $\xi\eta$, $\xi\zeta$ sind. Die Coordinaten des Austrittspunkts eines Strahls seien $\xi_0\eta_0\zeta_0$, die eines andern Punkts B (Fig. 2) desselben Strahls seien $\xi_1\eta_1\zeta_1$, endlich $\xi_2\eta_2\zeta_2$ die des Punkts C, welcher nach Fig. 2 zu B gehört. Man erhält alsdann auf analoge Weise wie vorhin:

$$(2)\quad \xi_2 = \frac{1}{n}\xi_1,\ \eta_2 = \eta_1 + \frac{n-1}{n\varrho}\xi_1\eta_0,\ \zeta_2 = \zeta_1 + \frac{n-1}{n\varrho_1}\xi_1\zeta_0.$$

Dieselben Gleichungen erhält man aber auch aus (1), indem man $\frac{1}{n}$ statt n setzt.

In der Fig. 5, welche diesem Falle entspricht, sind ($\lambda\mu\beta$, $\lambda'\mu'\beta'$) die Projectionen des Strahls im Glase, $O'\mu = \eta_0$, $O'\mu' = \zeta_0$, $O'\xi_1 = \xi_1$, $\xi_1\beta = \eta_1$, $\xi_1\beta' = \zeta_1$; man hat $O'\xi_2 = \frac{1}{n}O'\xi_1$ gemacht und das Loth durch ξ_2 mit den Linien $\beta\gamma$, $\beta'\gamma'$ durchschnitten, welche beziehungsweise den Strecken $\mu\varrho$, $\mu'\varrho_1$ parallel sind. Die gesuchten Projectionen des in die Luft tretenden Strahls sind $\mu\gamma$, $\mu'\gamma'$.

In Betreff der Figuren 4 und 5, sowie der weiterhin folgenden, ist eine Bemerkung zu machen: alle zur Linsenachse senkrechten Dimensionen, welche in den Gleichungen (1) und (2) auftreten, sind streng genommen als verschwindend klein zu denken. Da man aber mit solchen Grössen keine graphischen Operationen ausführen kann, so bleibt

nichts übrig, als dieselben in sehr stark vergrössertem Massstabe aufgetragen zu denken. Allerdings sind die Winkel der so bestimmten Linien und Strahlen mit der Achse nicht mehr die wirklichen, nichtsdestoweniger haben aber solche schematische Figuren immerhin etwas Anschauliches. Der Wirklichkeit entsprechen sie erst nachdem in Gedanken alle y und z, ξ und ζ in gleichem Verhältniss und auf ein so kleines Mass reducirt sind, dass nun die Formeln (1) und (2) Anwendung finden.

Zweites Kapitel.

Paraboloidische Linse an welcher die Hauptschnitte der Grenzflächen zusammenfallen.

§ 4.

Verfolgung eines einzelnen Strahls.

Als Vorbereitung auf den allgemeinen Fall behandeln wir zuerst die Brechung in einer Linse, an welcher die Hauptschnitte der Grenzparaboloide zusammenfallen. In Fig. 6 sei $OO' = \triangle$ die Dicke der Linse; die Achsen Oy und $O'\eta$, folglich auch Oz und $O'\zeta$ sind je parallel. Auf dem einfallenden Strahl $(lm,\ l'm')$ nehmen wir den Punkt $(a,\ a')$, machen $Ox_2 = n \,.\, Ox_1$, ziehen $ab \parallel mr$, $a'b' \parallel m'r_1$ und erhalten so den gebrochenen Strahl $(mb,\ m'b')$, welcher die zweite Grenzfläche in $(\mu,\ \mu')$ trifft. Nun machen wir $O'\xi_2 = \frac{1}{n}\, O'x_2 = \frac{1}{n}\, O'\xi_1$, ziehen $bc \parallel \mu\varrho$, $b'c' \parallel \mu'\varrho_1$, so ist $(\mu c,\ \mu'c')$ der aus der Linse tretende Strahl. Wollen wir diesen Strahl durch Rechnung bestimmen, so erhalten wir zunächst mit den Ausdrücken unter (1) die Gleichungen des gebrochenen Strahls $(mb,\ m'b')$, woraus sich für die Coordinaten $O'\mu = \eta_0$, $O'\mu' = \xi_0$, die Werthe ergeben,

$$(3)\quad \begin{cases} \eta_0 = y_0 + \left(\frac{y_1 - y_0}{nx_1} - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{y_0}{r}\right) \triangle \\ \xi_0 = z_0 + \left(\frac{z_1 - z_0}{nx_1} - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{z_0}{r_1}\right) \triangle. \end{cases}$$

Diese Ausdrücke verbunden mit denen unter (1) und (2) liefern $\xi_2\eta_2\zeta_2$, so dass jetzt die Gleichungen des Strahls $(\mu c,\ \mu'c')$ hingeschrieben werden können. Mit Rücksicht

auf die nächsten Bedürfnisse der Praxis beschränken wir uns aber darauf, die Linsendicke als sehr klein gegen r, r_1, x_1 anzunehmen, und dann hat man statt der Gleichungen (3) einfach

$$(3_{bis}) \quad \eta_0 = y_0, \ \zeta_0 = z_0.$$

Wegen des sehr kleinen $\triangle$ kann man ferner statt $\xi_1 = x_2 - \triangle$ setzen, $\xi_1 = x_2 = n x_1$; ohnehin ist $\eta_1 = y_2$, $\zeta_1 = z_2$. Und so erhält man aus (1) (2) (3_{bis}) die Relationen:

$$(4) \quad \xi_2 = x_1, \ \eta_2 = y_1 - \left(\frac{n-1}{r} - \frac{n-1}{\varrho}\right) x_1 y_0,$$

$$\zeta_2 = z_1 - \left(\frac{n-1}{r_1} - \frac{n-1}{\varrho_1}\right) x_1 z_0.$$

Führt man zur Abkürzung die folgenden Bezeichnungen ein,

$$(5) \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{x_1} + \frac{n-1}{r} - \frac{n-1}{\varrho}, \ \frac{1}{p_1} = \frac{1}{x_1} + \frac{n-1}{r_1} - \frac{n-1}{\varrho_1},$$

so findet man als Gleichungen des Strahls $(\mu c, \ \mu' c')$ die folgenden:

$$(6) \quad \eta = \frac{y_1}{x_1}\xi + y_0\left(1 - \frac{\xi}{p}\right), \ \zeta = \frac{z_1}{x_1}\xi + z_0\left(1 - \frac{\xi}{p_1}\right).$$

Graphisch gestaltet sich die Sache folgendermassen: in Fig. 7, Taf. II. fallen die Achsen Oy und $O'\eta$, Oz und $O'\zeta$ fast zusammen, ebenso m und μ, m' und μ'. Durch einen beliebigen Punkt $(a, \ a')$ des einfallenden Strahls $(lm, \ l'm')$ legen wir $(ab, \ a'b')$ parallel $(mr, \ m'r_1)$; Ox_2 ist gleich $n \,.\, Ox_1$. Durch $(b, \ b')$ legen wir $(bc, \ b'c')$ parallel $(m\varrho, \ m'\varrho_1)$. Die Punkte $c, \ c'$ kommen auf das Loth aa' zu liegen; $(mc, \ m'c')$ ist der Strahl nach seinem Durchgang durch die Linse.

Eine erste bemerkenswerthe Eigenschaft unsrer dünnen Linse besteht nun darin, dass sie auf denselben einfallenden Strahl in gleicher Weise wirkt, man mag die Fläche (rr_1) oder die Fläche $(\varrho\varrho_1)$ als Eintrittsfläche nehmen. In den Formeln (4) ist die erstere als Eintrittsfläche genommen; wenn wir aber die Linse um Oy oder Oz um 180^0 drehen, so sind $-\varrho$, $-\varrho_1$ die Abscissen der Krümmungsmittelpunkte für die nunmehrige Eintrittsfläche, und $-r$, $-r_1$ für die Austrittsfläche. Ersetzt

man nun in (4) in dem Werthe für η_2, r durch $-\varrho$, ϱ durch $-r$, und in dem Werthe für ζ_2, r_1 durch $-\varrho_1$, ϱ_1 durch $-r_1$, so bleiben die dortigen Parenthesen, folglich auch die Werthe von p und p_1 unter (5), so wie die Gleichungen (6) ungeändert. Es entspricht diess einer bekannten Eigenschaft dünner sphärischer Linsen.

Eine zweite Eigenschaft unsrer dünnen Linse, die sie ebenfalls mit der dünnen sphärischen Linse gemein hat, ist die, dass ein im Scheitel O einfallender Strahl keine Ablenkung erfährt, sondern wie durch ein dünnes Planparallelglas hindurchgeht. In den Gleichungen (6) haben wir für einen Scheitelstrahl $y_0 = 0$, $z_0 = 0$ zu setzen; dann sind $\eta = \frac{y_1}{x_1}\xi$, $\zeta = \frac{z_1}{x_1}\xi$ die Gleichungen des Scheitelstrahls nach seinem Durchgang durch die Linse; die Gleichungen des einfallenden Strahls sind aber $y = \frac{y_1}{x_1}x$, $z = \frac{z_1}{x_1}x$, welche wegen der verschwindenden Kleinheit von OO' als identisch mit den voranstehenden Gleichungen anzusehen sind. — Zu demselben Resultate führt auch die graphische Behandlung: in Fig. 7 seien sOa, $s'Oa'$ die Projectionen eines Scheitelstrahls, dem Punkte (a, a') entspricht für die Brechung an O der Hülfspunkt (β, β') wo $a\beta$ und $a'\beta'$ der Achse parallel sind; die zweite Brechung bei O' führt auf den Punkt (a, a') zurück, von dem man ausging.

§ 5.

Brechung eines homocentrischen Strahlenbüschels, dessen Centrum auf die Linsenachse fällt.

Von besonderer Wichtigkeit ist aber das Studium der Modification, welche ein homocentrisches Strahlenbüschel bei seinem Durchgang durch unsre dünne paraboloidische Linse erfährt. Wir wollen zu diesem Zwecke annehmen, der bisher gebrauchte Punkt A $(x_1 y_1 z_1)$ oder in Fig. 7 der Punkt (a, a') sei das Strahlencentrum, d. h. der Punkt, gegen welchen für ein positives x_1 alle Strahlen des

Büschels convergiren, oder von welchem sie für ein negatives x_1 divergiren. Der Hauptschnitt xOy oder $(r\varrho)$ mag zur Fixirung der Anschauung horizontal und daher $(r_1\varrho_1)$ vertikal vorausgesetzt werden.

Wir betrachten nun zuerst den Fall, dass A auf der Linsenachse selbst liege. In Fig. 8 sei dann $OA = x_1$; y_1, z_1 sind gleich Null. Mit Hülfe der Gleichungen (5) bestimmen wir p und p_1, und machen $Op = p$, $Op_1 = p_1$. Die Gleichungen irgend eines gegen A convergirenden Strahls, bestimmt durch die Coordinaten $(0, y_0, z_0)$ der Eintrittsstelle, sind nach der Brechung in der Linse

$$(6_{\text{bis}}) \quad \eta = y_0\left(1 - \frac{\xi}{p}\right), \; \zeta = z_0\left(1 - \frac{\xi}{p_1}\right).$$

Weil nun für $\xi = p$, $\eta = 0$ wird, was auch y_0 sein mag, so gehen die Horizontalprojectionen aller gebrochenen Strahlen durch den Punkt p der Linsenachse; ebenso gehen die Vertikalprojectionen aller gebrochenen Strahlen durch den Punkt p_1. Sind daher lmA, $l'm'A$ die Projectionen eines einfallenden Strahls, so sind mp, $m'p_1$ die Projectionen des gebrochenen Strahls; (p, v_1) ist der Bohrpunkt des gebrochenen Strahls im vertikalen, (h, p_1) der Bohrpunkt im horizontalen Hauptschnitt. Die stetige Folge der Punkte (p, v_1) bildet daher eine vertikale (der zAchse parallele) Brennlinie, die Folge der Punkte (h, p_1) eine horizontale (der yAchse parallele) Brennlinie.

Es scheint angemessen, dieses Resultat noch durch anderweitige Betrachtungen zu klarer Anschauung zu bringen. Die Gesammtheit der einfallenden Strahlen können wir uns zerlegt denken in kegelförmige Strahlenbüschel mit A als gemeinschaftlicher Spitze. Für irgend einen der Strahlenkegel sei $y_0^2 + z_0^2 = \delta^2$ die Gleichung der Eintrittskurve. Eliminirt man nun zwischen dieser Gleichung und den Gleichungen (6_{bis}) die Grössen y_0 und z_0, so kommt

$$(7) \quad \frac{\eta^2}{\delta^2\left(1 - \frac{\xi}{p}\right)^2} + \frac{\zeta^2}{\delta^2\left(1 - \frac{\xi}{p_1}\right)^2} = 1,$$

als Gleichung der krummen Fläche, welche alle gebrochenen, dem eintretenden Strahlenkegel entsprechenden Strahlen enthält. Alle Schnitte dieser Fläche mit einer zur Linsenachse senkrechten Ebene $\xi = \text{Const.}$ sind, wie man sieht, Ellipsen; für die besonderen Werthe $\xi = p$, $\xi = p_1$ ziehen sich die Ellipsen auf die Brennlinien zusammen, und zwar führt $\xi = p$ auf $\eta = 0$; $\xi = p_1$ auf $\zeta = 0$. Die zwei ersten sind die Gleichungen der vertikalen, die zwei letzten die der horizontalen Brennlinie. Der Theil der krummen Fläche, welcher zwischen die Brennlinien fällt, hat einige Aehnlichkeit mit einem Tetraëder, in welchem die zwei Brennlinien zwei rechtwinkliche Gegenkanten wären; ich habe daher bei einer andern Gelegenheit*) von tetraëdrischer Modification des Lichts gesprochen.

Wir können uns die eintretenden Strahlen auch als die Gesammtheit ebener die Linsenachse enthaltender Strahlenfächer denken, welche nach A convergiren und von denen irgend einer längs der Geraden $z_0 = my_0$ eintritt; hier ist m die trig. Tangente des Winkels, den die Eintrittslinie mit der positiven yAchse macht und den wir uns von 0^0 bis 180^0 wachsend denken müssen, um alle eintretenden Strahlen zu umfassen. Eliminirt man y_0 und z_0 zwischen der Gleichung $z_0 = my_0$ und den Gleichungen (6_{bis}), so kommt

$$(8) \quad \frac{\zeta}{\eta} = m \frac{1 - \frac{\xi}{p_1}}{1 - \frac{\xi}{p}} = \mu.$$

Diess ist die Gleichung der krummen Fläche, in welche ein ebener Strahlenfächer durch Brechung in der Linse umgewandelt wird. Jede Ebene $\xi = \text{Const.}$ schneidet diese Fläche nach einer Geraden $\zeta = \mu\eta$, deren Lage somit für ein gegebenes ξ mit m sich ändert. Was aber m sein mag, so ist $\mu = 0$ für $\xi = p_1$, und $\mu = \infty$ für $\xi = p$, d. h. alle die

*) Poggendorff's Annalen, Band CXXX. S. 498.

windschiefen Streifen, welche der Gesammtheit der einfallenden Strahlenfächer entsprechen, gehen sowohl durch die horizontale Brennlinie $p_1 h$, als durch die vertikale Brennlinie $p v_1$ (Fig. 8).

§ 6.

Brechung eines homocentrischen Strahlenbüschels, dessen Centrum ausserhalb der Linsenachse liegt.

Liegt das Strahlencentrum A $(x_1 y_1 z_1)$ ausserhalb der Linsenachse, so gelten die Gleichungen (4), (5), (6) in § 4. für jeden Strahl des Büschels. Die erste der Gleichungen (6) besagt alsdann, dass die Horizontalprojectionen aller gebrochenen Strahlen durch denselben Punkt $\left(\xi = p, \eta = \frac{y_1}{x_1} p\right)$, also durch den Punkt ω (Fig. 7) gehen, in welchem die Horizontalprojection Oa des Scheitelstrahls von dem Loth in p getroffen wird. Vermöge der zweiten Gleichung gehen alle Vertikalprojectionen durch denselben Punkt gleichfalls $\left(\xi = p_1, \zeta = \frac{z_1}{x_1} p_1\right)$, also durch den Punkt ϖ_1 in welchem die Vertikalprojection Oa' des Scheitelstrahls von dem Loth in p_1 geschnitten wird. Ist daher $(lma, l'm'a')$ ein einfallender Strahl, so ist $(m\omega, m'\varpi_1)$ der zugehörige gebrochene. Hiernach haben die gebrochenen Strahlen sowohl eine durch ϖ_1 gehende horizontale Brennlinie $(p_1 h, \varpi_1)$ als eine durch ω gehende vertikale Brennlinie (ω, pv').

Ein ebener gegen A zielender Strahlenfächer, welcher längs der Geraden $z_0 = m y_0$ eintritt, verwandelt sich beim Durchgang durch die Linse in einen windschiefen Streifen; die Gleichung der Fläche zu der er gehört wird gefunden, indem man y_0, z_0 zwischen $z_0 = m y_0$ und den Gleichungen (6) eliminirt. Sie ist

$$(9) \quad \frac{\zeta - \frac{z_1}{x_1}\xi}{\eta - \frac{y_1}{x_1}\xi} = m \frac{1 - \frac{\xi}{p_1}}{1 - \frac{\xi}{p}}.$$

Alle windschiefen Streifen enthalten den Scheitelstrahl, denn die Coordinaten $\left(\xi, \frac{y_1}{x_1}\xi, \frac{z_1}{x_1}\xi\right)$, welche irgend einem Punkte dieses Strahls angehören, befriedigen die Gleichung (9) was auch m sein mag. — Die Gerade längs welcher die Fläche (9) durch eine Ebene $\xi = \text{Const.}$ geschnitten wird, geht durch den Scheitelstrahl und ist, wie die Vergleichung mit (8) § 4. zeigt, parallel derjenigen Geraden, längs welcher durch dieselbe Ebene ein windschiefer Streifen geschnitten wird, der zu einem gegen den Achsenpunkt x_1 zielenden längs derselben Geraden $z_0 = my_0$ eintretenden Strahlenfächer gehört. — Alle windschiefen Streifen gehen durch die Ebene $\xi = p$ längs derselben vertikalen Geraden $\left(\xi = p, \eta = \frac{y_1}{x_1}p\right)$, und durch die Ebene $\xi = p_1$ längs derselben horizontalen Linie $\left(\xi = p_1, \zeta = \frac{z_1}{x_1}p_1\right)$.

Die Achsenpunkte p, p_1 welche nach dem Vorhergehenden sowohl bei einem Strahlencentrum auf als ausserhalb der Achse eine Rolle spielen, haben wir bisher mehr als Hülfspunkte gebraucht, deren Abscissen durch die Gleichungen (5) § 4. bestimmt waren. Diese Punkte haben aber auch eine optische Bedeutung, welche aus den Gleichungen (6) und (6_{bis}) leicht zu erkennen ist. Liegt das Centrum A auf der Achse (Fig. 8) so ist p mit A conjugirt für die Brechung eines ebenen Strahlenfächers im horizontalen Linsenhauptschnitt $(r\varrho)$, und ebenso ist p_1 mit demselben A conjugirt für die Brechung eines Fächers im vertikalen Hauptschnitt $(r_1\varrho_1)$.

Liegt A ausserhalb der Achse, so denke man sich einmal einen Strahlenfächer, welcher im horizontalen Hauptschnitt gegen die Horizontal-Projection a zielt, und dann einen Fächer welcher im vertikalen Hauptschnitt gegen die Vertikal-Projection a' zielt; für den ersten Fächer ist ω mit a, für den zweiten ω_1 mit a' conjugirt.

Die Fig. 7 enthält noch einige Andeutungen, wie die Punkte ω und ω_1 graphisch bestimmt werden können, wobei

wir jedoch der Kürze halber gewisse elementare Sätze über die Brechung an sphärischen Flächen als bekannt voraussetzen. Die Gerade lma bedeute jetzt einen der gegen a zielenden Strahlen in $(r\varrho)$, so ist mb die Richtung des erstmals gebrochenen Strahls und sein Schnittpunkt λ mit ra ist für die erste Brechung mit a conjugirt; die Verbindungslinie von λ und ϱ schneidet mc im gesuchten Punkte ω. Ganz analoges gilt in Betreff der Punkte λ_1 und ϖ_1 im Hauptschnitt $(r_1\varrho_1)$. Eine Genauigkeitsprobe liegt darin, dass ω auf Oa, ϖ_1 auf Oa_1 liegen muss.

Den Inhalt dieses Paragraphen können wir in folgender Weise zusammenfassen: Ist A das ausserhalb der Linsenachse liegende Strahlencentrum, so projicire man A auf die Achse in x_1 (Fig. 7) und bestimme nach § 4. (5) die Achsenpunkte p, p_1, wovon der erste mit x_1 conjugirt ist für die Brechung im horizontalen Hauptschnitt $(r\varrho)$, der zweite für die Brechung im vertikalen Hauptschnitt $(r_1\varrho_1)$. Durch p und p_1 lege man Ebenen senkrecht zur Achse; die erste schneide den Scheitelstrahl OA in P, die zweite in P_1; alsdann geht durch P die mit Oz parallele oder vertikale Brennlinie, durch P_1 die mit Oy parallele oder horizontale Brennlinie. Einem einfallenden Strahl MA entspricht als gebrochener eine Gerade, welche durch M und die beiden Brennlinien geht.

Drittes Kapitel.

Paraboloidische Linse an welcher die Hauptschnitte der Grenzflächen einen beliebigen Winkel einschliessen.

§ 7.

Verfolgung eines einzelnen Strahls.

Die Aufgabe: einen Strahl durch eine paraboloidische Linse zu verfolgen, an welcher die Hauptschnitte der Grenzflächen beliebig gegen einander geneigt sind, wollen wir zuerst graphisch lösen. Die von § 4. her bekannte Fig. 4, Taf. I. beziehe sich auf die Eintrittsfläche; durch sie wird für einen beliebig einfallenden Strahl LMA oder $(lma, l'm'a')$, der zugehörige gebrochene MB oder $(mb, m'b')$ gefunden. Gelingt es nun in Fig. 5, welche sich auf den Austritt bezieht, die Projectionen $(\mu\beta, \mu'\beta')$ des eben bestimmten Strahls MB für das verdrehte Coordinatensystem $\xi\eta\zeta$ zu ermitteln, so ergiebt sich hieraus in bekannter Weise der die Linse verlassende Strahl MC oder $(\mu\gamma, \mu'\gamma')$. Ein- und Austrittsstelle des Strahls sind hiebei als unendlich nahe beisammen liegend vorausgesetzt. In Fig. 9 sei nun $yO\eta = \vartheta$ der Winkel den die homologen Hauptschnitte xOy und $\xi O'\eta$ mit einander machen: indem wir die Coordinaten y_0, z_0 auftragen, erhalten wir M, und durch die Lothe von M auf die verdrehten Achsen $O\eta$ und $O\zeta$ die Coordinaten η_0, ζ_0 der Ein- und Austrittsstelle für die neuen Achsen. Ebenso erhalten wir in Fig. 10 die Coordinaten η_1, ζ_1 von B für die neuen Achsen aus den Coordinaten $x_2b = y_2$, $x_2b' = z_2$ (Fig. 4 und 10). In Fig. 5 tragen wir endlich $O'\mu = \eta_0$,

$O'\mu' = \xi_0$ ein, machen $O'\xi_1 = Ox_2$, $\xi_1\beta \doteq \eta_1$, $\xi_1\beta' = \zeta_1$; dann sind $\mu\beta$, $\mu'\beta'$ die Projectionen von MB für die neuen Achsen und folglich $\mu\gamma$, $\mu'\gamma'$ die Projectionen von MC für dieselben Achsen.

Um den Strahl durch Rechnung zu verfolgen, verbinden wir mit den Relationen (1) und (2) welche sich auf beliebigen Eintritt und Austritt beziehen, diejenigen welche sich aus den Fig. 9 und 10 ergeben, und erhalten so

$$(a)\quad x_2 = nx_1,\ y_2 = y_1 - \frac{n-1}{r}x_1y_0,\ z_2 = z_1 - \frac{n-1}{r_1}x_1z_0,$$

$$(b)\quad x_0 = \xi_0 = 0,\ \eta_0 = z_0\sin\vartheta + y_0\cos\vartheta,\ \zeta_0 = z_0\cos\vartheta - y_0\sin\vartheta,$$

$$(c)\quad \xi_1 = x_2 = nx_1,\ \eta_1 = z_2\sin\vartheta + y_2\cos\vartheta,\ \zeta_1 = z_2\cos\vartheta - y_2\sin\vartheta,$$

$$(d)\quad \xi_2 = \frac{1}{n}\xi_1 = x_1,\ \eta_2 = \eta_1 + \frac{n-1}{n\varrho}\xi_1\eta_0,\ \zeta_2 = \zeta_1 + \frac{n-1}{n\varrho_1}\xi_1\zeta_0.$$

Aus Fig. 9 erhält man noch die auf die neuen Achsen bezogenen Coordinaten η', ζ' des Punktes A, ausgedrückt in y_1, z_1, nämlich

$$(e)\quad \eta' = z_1\sin\vartheta + y_1\cos\vartheta,\ \zeta' = z_1\cos\vartheta - y_1\sin\vartheta.$$

Durch Verbindung der Gleichungen (a) bis (d) und Berücksichtigung von (e) erhalten wir zunächst ξ_2, η_2, ζ_2 in folgender Form:

$$(10)\quad \begin{cases} \xi_2 = x_1 \\ \eta_2 = \eta' - \left(\frac{n-1}{r} - \frac{n-1}{\varrho}\right)x_1y_0\cos\vartheta - \left(\frac{n-1}{r_1} - \frac{n-1}{\varrho}\right)x_1z_0\sin\vartheta, \\ \zeta_2 = \zeta' + \left(\frac{n-1}{r} - \frac{n-1}{\varrho_1}\right)x_1y_0\sin\vartheta - \left(\frac{n-1}{r_1} - \frac{n-1}{\varrho_1}\right)x_1z_0\cos\vartheta. \end{cases}$$

Die Verbindung dieser Ausdrücke mit (b) liefert die Gleichungen des die Linse verlassenden Strahls. Führen wir hier die Abkürzungen ein,

$$(11)\quad \begin{cases} \frac{1}{p} = \frac{1}{x_1} + \frac{n-1}{r} - \frac{n-1}{\varrho},\ \frac{1}{p_1} = \frac{1}{x_1} + \frac{n-1}{r_1} - \frac{n-1}{\varrho_1}, \\ \frac{1}{q} = \frac{1}{x_1} + \frac{n-1}{r} - \frac{n-1}{\varrho_1},\ \frac{1}{q_1} = \frac{1}{x_1} + \frac{n-1}{r_1} - \frac{n-1}{\varrho}, \end{cases}$$

so schreiben sich jene Gleichungen in folgender Form:

$$(12)\quad \begin{cases} \eta = \frac{\eta'}{x_1}\,\xi + y_0\left(1 - \frac{\xi}{p}\right)\cos\vartheta + z_0\left(1 - \frac{\xi}{q_1}\right)\sin\vartheta \\ \zeta = \frac{\zeta'}{x_1}\,\xi - y_0\left(1 - \frac{\xi}{q}\right)\sin\vartheta + z_0\left(1 - \frac{\xi}{p_1}\right)\cos\vartheta. \end{cases}$$

Die Bedeutung der in (11) eingeführten Hülfsgrössen ergiebt sich leicht nach den in § 6. gemachten Bemerkungen: macht man nämlich $\vartheta = 0$, lässt also die homologen Hauptschnitte xOy und $\xi O'\eta$ zusammenfallen, so sind, wie früher p und p_1 die Abscissen von Achsenpunkten, welche mit dem Achsenpunkt x_1 conjugirt sind für die Brechungen in den Hauptquerschnitten $(r\varrho)$ und $(r_1\varrho_1)$; macht man aber $\vartheta = 90^0$, verdreht also die Austrittsfläche um einen rechten Winkel gegen die Eintrittsfläche, so sind q und q_1 die Abscissen von Achsenpunkten, welche mit demselben Achsenpunkte x_1 conjugirt sind für die Brechungen in den nunmehrigen Hauptquerschnitten $(r\varrho_1)$ und $(r_1\varrho)$.

Ein beliebiger Scheitelstrahl wird, was auch ϑ sein mag, unabgelenkt durch unsre dünne Linse gehen; denn setzt man in (12) $y_0 = 0$, $z_0 = 0$, so bleiben die Gleichungen $\eta = \frac{\eta'}{x_1}\,\xi$, $\zeta = \frac{\zeta'}{x_1}\,\xi$, welche vermöge der Bedeutung von η', ζ', wie sie in den Ausdrücken (e) gegeben ist, nichts Anderes als die Fortsetzung der Geraden $y = \frac{y_1}{x_1}\,x$, $z = \frac{z_1}{x_1}\,x$ bedeuten.

§ 8.

Brechung eines homocentrischen Strahlenbüschels, dessen Centrum auf der Linsenachse liegt.

Das Centrum eines einfallenden Strahlenbüschels liege auf der Linsenachse; wir haben daher in (12) $\eta' = 0$, $\zeta' = 0$. Wir untersuchen nun die Modification, welche ein ebener Strahlenfächer OMA durch die Brechung in der Linse erfährt. Zu diesem Zwecke verbinden wir die Gleichung

$z_0 = my_0$ der Geraden, längs welcher der Strahlenfächer eintritt mit den Gleichungen (12) und erhalten

$$(13)\quad \frac{\zeta}{\eta} = \frac{-\left(1-\frac{\xi}{q}\right)\sin\vartheta + m\left(1-\frac{\xi}{p_1}\right)\cos\vartheta}{\left(1-\frac{\xi}{p}\right)\cos\vartheta + m\left(1-\frac{\xi}{q_1}\right)\sin\vartheta} = \mu.$$

Da nun die rechte Seite für ein gegebenes m und ein willkührlich angenommenes ξ immer einen bestimmten, aber mit ξ veränderlichen Werth annimmt, so folgt hieraus, dass der gebrochene Strahlenfächer durch alle zur Achse senkrechte Ebenen je längs einer Geraden $\zeta = \mu\eta$ geschnitten wird und dass daher die gebrochenen Strahlen einen windschiefen Streifen bilden.

Denkt man sich nun m veränderlich, betrachtet also die stetig neben einander liegenden Strahlenfächer OMA, so kann man fragen, ob es nicht möglich ist, für ξ einen solchen Werth ε zu finden, dass μ denselben Werth erhält, was auch m sein mag. Alsdann würden die verschiedenen windschiefen Streifen alle längs derselben Brennlinie $\zeta = \mu\eta$ durch die Ebene $\xi = \varepsilon$ gehen. Die Bedingungen hiefür sind aber nach (13) folgende zwei:

$$(14)\quad \begin{cases} \mu\left(1-\frac{\varepsilon}{p}\right)\cos\vartheta + \left(1-\frac{\varepsilon}{q}\right)\sin\vartheta = 0 \\ \mu\left(1-\frac{\varepsilon}{q_1}\right)\sin\vartheta - \left(1-\frac{\varepsilon}{p_1}\right)\cos\vartheta = 0. \end{cases}$$

Durch Elimination von μ erhält man hieraus für ε eine quadratische Gleichung, deren Wurzeln mit ε_1 und ε_2 bezeichnet werden mögen. Diese Werthe der Reihe nach in die eine oder andere der Gleichungen (14) eingesetzt, erhält man den zu ε_1 gehörigen Werth von μ, welcher μ_1 heissen möge, und nachher das zu ε_2 gehörige μ_2. Eliminirt man aber ε aus den Gleichungen (14), so kommt auch für μ eine quadratische Gleichung, welche auf die Form $\mu^2 + A\mu + B = 0$ gebracht, mit Hülfe der Relationen (11) zeigt, dass

$$(15)\quad B = \mu_1 \cdot \mu_2 = -\frac{\frac{1}{p} - \frac{1}{q_1}}{\frac{1}{q} - \frac{1}{p_1}} = -1,$$

dass folglich die zwei Brennlinien immer rechtwinklich gegen einander stehen.

Legt man daher durch zwei Punkte der Linsenachse, deren Abscissen ε_1 und ε_2 sind, zwei zur Achse senkrechte Ebenen E_1 und E_2 und zieht in der ersteren durch die Achse eine Gerade D_1, welche mit der Achse $O\eta$ einen Winkel φ_1 macht, für welchen tang $\varphi_1 = \mu_1$ ist, ferner in E_2 ebenfalls durch die Achse eine Gerade D_2, welche rechtwinklich zu D_1 steht, so entspricht jedem einfallenden Strahl MA ein gebrochener, welcher durch M und durch die beiden Brennlinien D_1 und D_2 geht.

§ 9.

Brechung eines homocentrischen Strahlenbüchels, dessen Centrum ausserhalb der Achse liegt.

In diesem allgemeinsten Falle combiniren wir die Gleichungen unter (12) mit der Gleichung $z_0 = my_0$ der Geraden, längs welcher ein ebener gegen A zielender Strahlenfächer eintritt und erhalten

$$(16)\quad \left\{\frac{\zeta - \frac{\zeta'}{x_1'}\xi}{\eta - \frac{\eta'}{x_1'}\xi} = \frac{-\left(1 - \frac{\xi}{q}\right)\sin\vartheta + m\left(1 - \frac{\xi}{p_1}\right)\cos\vartheta}{\left(1 - \frac{\xi}{p}\right)\cos\vartheta + m\left(1 - \frac{\xi}{q_1}\right)\sin\vartheta}\right.$$

als Gleichung der Fläche, in welche der eintretende ebene Fächer durch die Brechung in der Linse verwandelt wird. Mit Rücksicht auf die Resultate des vorhergehenden Paragraphen und die in § 6. gemachten Bemerkungen werden wir aus Gleichung (16) unmittelbar Folgendes ablesen: man projicire das Strahlencentrum auf die Linsenachse in x_1; für diesen Punkt bestimme man nach § 8. die Ebenen E_1, E_2 und die Brennlinien D_1, D_2. Durch

die Punkte P_1, P_2, in welchen der Scheitelstrahl des Büschels durch die Ebenen E_1, E_2 geschnitten wird, lege man in E_1 eine Parallele d_1 mit D_1, in E_2 eine Parallele d_2 mit D_2; so sind d_1 und d_2 die gesuchten Brennlinien, und jedem einfallenden Strahl MA entspricht ein gebrochener, der durch M geht und die beiden Brennlinien d_1 und d_2 berührt.

Viertes Kapitel.

Die Cylinderlinsen.

§ 10.

Uebergang von paraboloidischen Grenzflächen zu cylindrischen.

Wenn wir in einer paraboloidischen Linse, für welche die Hauptschnitte der Grenzflächen zusammenfallen (§ 4.—6.) einen der Parameter der Eintrittsfläche z. B. $r_1 = \infty$ setzen, so verwandelt sich dieselbe in einen parabolischen Cylinder, dessen Mantellinien parallel sind der z Achse und welcher für Strahlen, die nahe bei O auffallen, gleichgeltend ist einem Kreiscylinder, dessen Halbmesser gleich ist dem Krümmungshalbmesser r der Parabel im Hauptschnitt xOy. Nehmen wir in der Austrittsfläche $\varrho_1 = \infty$, so sind die Achsen der Grenzcylinder parallel und der Querschnitt der so erhaltenen Cylinderlinse enthält die beiden Krümmungshalbmesser r und ϱ. Machen wir dagegen $r_1 = \infty$ und $\varrho = \infty$, so erhalten wir eine Cylinderlinse mit gekreuzten Achsen. Nehmen wir endlich $r_1 = \infty$ und $\varrho = \varrho_1$, so wird die Austrittsfläche ein Umdrehungsparaboloid, das in seinem Scheitelrevier durch eine Kugel vom Halbmesser ϱ ersetzt werden kann; diess giebt die sphärisch-cylindrischen Linsen.

Für alle diese Linsen gelten somit die im zweiten Kapitel entwickelten Sätze. Im Folgenden werden wir uns daher auf Strahlenbüschel beschränken, deren Centrum auf der Linsenachse liegt; da es ferner gleichgültig ist (§ 4.), ob die eine oder andere Linsenfläche dem Lichte zugewendet

ist, so werden wir uns, zur Fixirung der Anschauung, die Eintrittsfläche immer als eine Cylinderfläche denken, deren Querschnitt horizontal ist und den Krümmungshalbmesser r hat. — Drehen wir dann die Linse um die Achse der y oder z um 180^0, so erhalten wir äquivalente Cylinderlinsen, an welchen Eintritts- und Austrittsflächen vertauscht sind.

§ 11.

Die Cylinderachsen sind parallel.

Donders (Astigmatismus und cylindrische Gläser) nennt diese Linsen einfach-cylindrische Gläser. Für sie ist $r_1 = \infty$, $\varrho_1 = \infty$; hieraus folgt nach § 4. (5) zunächst

$$(a) \quad p_1 = x_1$$

d. h. die horizontale in der Ebene des Linsenquerschnitts liegende Brennlinie (§ 5.) geht bei diesen Linsen allezeit durch das Strahlencentrum selber und entspricht somit für positive x_1 einer Durchkreuzung wirklicher Strahlen, weswegen sie eine reelle Brennlinie heisst, aber für negative x_1 einer Durchkreuzung der geometrischen Rückwärtsverlängerungen der gebrochenen Strahlen, weswegen die Brennlinie eine virtuelle genannt wird.

Der Achsenpunkt p durch welchen die vertikale, den Cylinderachsen parallele, Brennlinie geht, ist (nach § 4. (5)) bestimmt durch die Gleichung

$$(b) \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{f}$$

wo

$$(c) \quad \frac{1}{f} = (n-1)\left\{\frac{1}{r} - \frac{1}{\varrho}\right\} \text{ gesetzt ist.}$$

Die hier eingeführte Grösse f ist nach (b) die Abscisse eines Achsenpunkts, der für Strahlen im horizontalen Querschnitt mit einem Strahlencentrum im Unendlichen conjugirt ist, oder kürzer die Brennweite für Parallelstrahlen im Querschnitt. Das Vorzeichen von f ist bedingt durch die Grössen und Vorzeichen von r und ϱ. Zweckmässig werden diese Linsen nach dem Vorzeichen von f in positive

und negative eingetheilt. Die ersteren (Fig. 11, 1. 2. 3) werden im Querschnitt von der Mitte gegen den Umfang dünner, die letzteren Fig. 12, 1. 2. 3 dicker.

Häufig werden diese Linsen als plancylindrische (Formen 3) hergestellt; da für gewöhnliches Glas $n = \frac{3}{2}$ genommen werden kann, so ist für sie $f = 2r$.

Etwas schwieriger herzustellen sind die Formen (2), wo r und ϱ entgegengesetzte Vorzeichen haben, die Linse daher beiderseits convex oder concav ist. Man schleift diese Linsen gewöhnlich gleichseitig, also in derselben Schale, so dass für $n = \frac{3}{2}$, $f = r$ wird. Die Formen (1) haben mehr nur theoretisches Interesse, als auf den Normalfall sich beziehend; ihre Herstellung würde dickere Gläser, stark differirende Krümmungshalbmesser, also mehr Arbeitsaufwand und grösseren Vorrath verschiedener Schalen erfordern.

Positive Linsen geben für einfallende Parallelstrahlen eine vertikale reelle Brennlinie rechts von der Linse im Abstand f; für negative Linsen liegt die Brennlinie links und ist virtuell. — Eine weitere Discussion der Gleichung (b) ist nach dem, was über sphärische Linsen bekannt ist, überflüssig.

§ 12.

Die Cylinderachsen sind rechtwinklich gekreuzt.

Für diese Linsen, welche Donders bicylindrische Gläser nennt, ist $r_1 = \infty$, $\varrho = \infty$; setzt man daher

$$(a) \quad \frac{r}{n-1} = f, \quad \frac{\varrho_1}{n-1} = f_1, \quad (f = 2r, \; f_1 = 2\varrho_1, \text{ für } n = \tfrac{3}{2}),$$

so sind nach § 4. (5) die Achsenpunkte p und p_1 durch welche die vertikale (mit z parallele) und die horizontale (mit y parallele) Brennlinie geht, bestimmt durch die Gleichungen

$$(b) \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{f}, \quad \frac{1}{p_1} = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{f_1}.$$

Fig. 13, 1 bezieht sich auf den Normalfall; die Linse ist von ungleichartigen Cylindern, einem convexen und einem

concaven eingeschlossen. Für Parallelstrahlen ($x_1 = \infty$) hat man rechts von der Linse im Abstand f eine vertikale reelle, links im Abstand f_1 eine horizontale virtuelle Brennlinie. Bei der Form 2 liegt die vertikale — virtuelle Brennlinie links im Abstand $\mathfrak{F}$, die horizontale reelle rechts im Abstand $\mathfrak{F}_1$. Denkt man sich die Form 2 um die Linsenachse um 90^0 gedreht, so erhält man hiernach eine mit Form 1 gleichwerthige Linse; es besteht daher kein wesentlicher Unterschied zwischen diesen zwei Formen.

Die Formen 3 und 4 sind durch gleichartige Cylinderflächen begrenzt; bei der ersten liegen für Parallelstrahlen zwei reelle Brennlinien rechts, bei der zweiten zwei virtuelle Brennlinien links von der Linse. Macht man hier überdiess $\varrho_1 = -r$, so wird nach (a) und (b) $p = p_1$; die Brennlinien gehen durch denselben Achsenpunkt p und alle gebrochenen Strahlen gehen nothwendig durch den Kreuzpunkt p der Brennlinien. Diese Linsen wirken daher wie sphärische Linsen von der positiven oder negativen Brennweite $f = 2r$. Es scheint sogar als ob bei diesen bicylindrischen Linsen die Verzerrung der Bilder gegen den Rand hin geringer wäre als bei äquivalenten sphärischen Linsen, weswegen sie manchmal als Lesegläser benützt werden.

§ 13.

Sphärisch-cylindrische Gläser.

Für diese Gläser ist nach § 10. zu setzen $r_1 = \infty$, $\varrho = \varrho_1$; r ist dann der Halbmesser der cylindrischen Eintrittsfläche, deren Achse vertikal gedacht ist, ϱ der Halbmesser der sphärischen Austrittsfläche. Setzt man in den allgemeinen Ausdrücken § 4. (5) $r_1 = \infty$, $\varrho = \varrho_1$ und überdiess

$$(a) \quad (n-1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\varrho}\right) = \frac{1}{f}, \quad \frac{n-1}{\varrho} = \frac{1}{f_1},$$

so hat man zur Bestimmung der Achsenpunkte p und p_1, durch welche die vertikale und horizontale Brennlinie geht,

$$(b) \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{f}, \quad \frac{1}{p_1} = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{f_1}.$$

Die Grösse f bedeutet die Brennweite für Parallelstrahlen im horizontalen Querschnitt (xy), f_1 dasselbe für Parallelstrahlen im vertikalen Querschnitt (xz). In Fig. 14, 1 sind r und ϱ positiv, aber noch $\varrho > r$ gedacht; für $x_1 = \infty$ wird $p = +f$, $p_1 = -f_1$, d. h. durch den Punkt p geht eine vertikale reelle, durch p_1 eine horizontale virtuelle Brennlinie. Bei der Form 3 ist r positiv, ϱ negativ gedacht; für $x_1 = \infty$ wird sowohl p als p_1 positiv. Die beiden Brennlinien fallen rechts von der Linse und sind reell. In Fig. 14, 2 sind r und ϱ negativ genommen, aber ausserdem der absolute Werth von ϱ grösser als der von r; diess macht, dass für $x_1 = \infty$, p negativ und p_1 positiv ausfällt; man hat daher links eine virtuelle vertikale und rechts eine reelle horizontale Brennlinie. Bei der Form 4 endlich ist r negativ und ϱ positiv; daher werden für $x_1 = \infty$, p und p_1 negativ und die Brennlinien fallen links von der Linse, sind daher beide virtuell.

§ 14.

Die astigmatische Linse von Stokes.

Diese Vorrichtung besteht (s. Donders, Astigm. pag. 55) aus zwei plancylindrischen Linsen von gleicher aber entgegengesetzter Krümmung, welche mit den Planflächen zusammengelegt sind und in messbarer Weise gegen einander verdrehbar sind. Wir denken uns beide Linsen quadratisch begrenzt (Fig. 15); die Cylindernormalen in den Mitten O, O' stehen senkrecht auf den Planflächen und werden als Achsen der einzelnen Linsen genommen (§ 2.). Welche Stellung die Linsen gegen einander haben mögen, immer sollen die eben genannten Linsenachsen in eine Gerade zusammenfallen, welche somit als Achse der Doppellinse aufzufassen ist. Mit der convexen Eintrittsfläche verbinden wir ferner ein Coordinatensystem xyz, dessen zAchse mit der Cylinderachse parallel sei; ebenso mit der concaven Austrittsfläche ein Coordinatensystem $\xi\eta\zeta$, dessen ζAchse ebenfalls die Richtung der Cylinderachse hat.

Wir stellen uns die Aufgabe, die Modification zu studiren, welche ein gegen einen Punkt der Linsenachse zielendes Strahlenbüschel durch die Brechung in der Doppellinse bei beliebiger Neigung der Cylinderachsen erfährt. Die Lösung dieser Aufgabe ist aber in den Resultaten des dritten Kapitels enthalten. Als homologe Hauptschnitte (§ 7.) nehmen wir die Querschnitte der einzelnen Cylinderlinsen: in Fig. 15, (1) fallen sie zusammen, in (2) stehen sie senkrecht aufeinander, in (3) bilden sie einen beliebigen Winkel $y\,O\eta = \vartheta$. Für unsere Linse ist nun $r = r$, $r_1 = \infty$, $\varrho = r$, $\varrho_1 = \infty$ und hiemit erhalten wir aus § 7. (11), wenn vorerst gesetzt wird,

$$(a)\quad f = \frac{r}{n-1}, \quad (f = 2r \text{ für } n = \tfrac{3}{2})$$

$$(b)\quad \begin{cases} p = p_1 = x_1 \\ \frac{1}{q} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{f},\ \frac{1}{q_1} = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{f}. \end{cases}$$

Diese Werthe in die Gleichungen (14) § 8. gesetzt, erhält ma

$$(c)\quad \begin{cases} \left(1 - \frac{\varepsilon}{x_1} - \frac{\varepsilon}{f}\right) \text{tang}\,\vartheta = -\,\mu\left(1 - \frac{\varepsilon}{x_1}\right) \\ \left(1 - \frac{\varepsilon}{x_1} + \frac{\varepsilon}{f}\right) \text{tang}\,\vartheta = \frac{1}{\mu}\left(1 - \frac{\varepsilon}{x_1}\right). \end{cases}$$

Addirt man dieselben so fällt ε mit x_1 heraus und es bleibt zur Bestimmung von μ,

$$\mu^2 + 2\mu\,\text{tang}\,\vartheta = 1$$

woraus $$\mu = \pm\sqrt{1 + \text{tang}^2\,\vartheta} - \text{tang}\,\vartheta,$$

und weiterhin

$$(d)\quad \begin{cases} \mu_1 = \frac{1 - \sin\vartheta}{\cos\vartheta} = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(90 - \vartheta) = \text{tang}\,\varphi_1, \\ \mu_2 = -\frac{1 + \sin\vartheta}{\cos\vartheta} = -\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(90 + \vartheta). \end{cases}$$

In Fig. 15, (3) denke man sich die Brennlinien auf die Linse projicirt; nach den eben gefundenen Ausdrücken halbirt alsdann die eine Brennlinie den spitzigen Winkel $\eta\,Oz = 90 - \vartheta$, welchen der Querschnitt $O\eta$ der verdrehten Concavlinse mit dem Längenschnitt Oz der festgedachten Convexlinse macht; die andere

Brennlinie halbirt den Nebenwinkel von ηOz, nämlich $\eta Oz' = -(90 + \vartheta)$. Dieses Resultat ist unabhängig von der Lage des Strahlencentrums. — Es ist einleuchtend, dass es ausreicht, den Winkel ϑ von 0^0 bis 90^0 gehen zu lassen.

Multiplicirt man die Gleichungen (*c*) mit einander, so fällt μ heraus und man findet nach leichter Reduction:

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{x_1} \pm \frac{\sin\vartheta}{f},$$

oder

$$(e) \quad \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_1} = \frac{1}{x_1} + \frac{\sin\vartheta}{f} \\ \frac{1}{\varepsilon_2} = \frac{1}{x_1} - \frac{\sin\vartheta}{f}. \end{cases}$$

Dass in Wahrheit ε_1 und μ_1 zusammengehören, ergiebt sich daraus, dass man den in (*e*) gegebenen Werth für ε_1 erhält, wenn man $\mu_1 = \frac{1 - \sin\vartheta}{\cos\vartheta}$ in die eine oder andere der Gleichungen (*c*) substituirt.

Vermöge der am Schlusse von § 8. eingeführten Bezeichnungen sind nun ε_1 und ε_2 die Abscissen der zwei zur Linsenachse senkrechten Ebenen E_1 und E_2, in welchen die durch die Gleichungen (*d*) der Lage nach bestimmten Brennlinien D_1 und D_2 liegen. Für einen unendlich fernen Punkt ($x_1 = \infty$) hat man $\varepsilon_1 = \frac{f}{\sin\vartheta}$, $\varepsilon_2 = -\frac{f}{\sin\vartheta}$, d. h. die Brennlinien liegen rechts und links von der Linse in gleichem Abstand $\frac{f}{\sin\vartheta}$; die den spitzigen Winkel ηOz halbirende Brennlinie D_1 ist reell, D_2 virtuell.

Für ein beliebig gegebenes Strahlencentrum d. h. für ein gegebenes positives oder negatives x_1 hätte man ε_1 und ε_2 erst aus (*e*) zu berechnen.

Die reelle Brennlinie D_1, sowie die oben angegebene Lage derselben lässt sich durch eine einfache Anordnung zur Anschauung bringen: die quadratisch begrenzten Linsen werden in die kreisförmige Oeffnung einer Korkscheibe ge-

bracht, in welcher sie durch Reibung an ihren Ecken in beliebiger gegenseitiger Stellung festhalten. Der Kreis in Fig. 15, (3) mag diese Oeffnung vorstellen. Das Bild einer nicht zu nahen Kerze wird nun hinter der Linse auf einem Papierschirm als schmale Lichtlinie $D_1 O D_1$ aufgefangen. Hiebei projicirt sich auch das Bild des sternförmigen Umfangs der gekreuzten Linsen auf das Papier und man erkennt leicht, dass die Lichtlinie durch die einspringenden Ecken ii des Sterns geht, welche auf der Halbirungslinie des spitzigen Winkels $\eta O z$ liegen.

§ 15.

Stigmatismus.

Ein astigmatisches Auge kann einigermassen verglichen werden mit einem durchsichtigen Medium das auf einer Seite durch ein convexes Paraboloid begrenzt ist. Wir beziehen dasselbe auf ein Coordinatensystem ΩXYZ, und nehmen den Hauptschnitt XY, in welchem der Krümmungshalbmesser R liegt, horizontal, folglich den Hauptschnitt XZ mit R_1 vertical; der Brechungsexponent für den Uebergang des Lichts aus Luft in das Augenmedium sei N. Ist nun $(X_0 = 0,\ Y_0,\ Z_0)$ die Eintrittsstelle eines beliebigen Strahls, $(X_1,\ Y_1,\ Z_1)$ ein Punkt desselben Strahls, so findet man mit den Ausdrücken (1) § 3. die Gleichungen des im Auge gebrochenen Strahls, nämlich

$$X = \frac{Y - Y_0}{\frac{Y_1}{NX_1} - \frac{Y_0}{N}\left(\frac{1}{X_1} + \frac{N-1}{R}\right)} = \frac{Z - Z_0}{\frac{Z_1}{NX_1} - \frac{Z_0}{N}\left(\frac{1}{X_1} + \frac{N-1}{R_1}\right)}.$$

Hier empfiehlt sich die Einführung der Hülfsgrössen P, P_1 bestimmt durch

$$(a) \quad \frac{1}{X_1} + \frac{N-1}{R} = \frac{N}{P},\ \frac{1}{X_1} + \frac{N-1}{R_1} = \frac{N}{P_1}$$

wodurch die obigen Gleichungen zu folgenden werden:

$$(b) \quad Y = \frac{Y_1}{NX_1} X + Y_0\left(1 - \frac{X}{P}\right),\ Z = \frac{Z_1}{NX_1} X + Z_0\left(1 - \frac{X}{P_1}\right).$$

Denken wir uns ferner unter $(X_1 Y_1 Z_1)$ ein Strahlencentrum, so ergiebt sich die Bedeutung dieser Gleichungen leicht nach den Erläuterungen des zweiten Kapitels. Verlegen wir vollends das Strahlencentrum auf die Achse, setzen daher $Y_1 = 0$, $Z_1 = 0$, so werden die Gleichungen (b) zu folgenden:

$$(b') \quad Y = Y_0 \left(1 - \frac{X}{P}\right), \; Z = Z_0 \left(1 - \frac{X}{P_1}\right).$$

Durch den Achsenpunkt P geht daher eine vertikale mit Z parallele, durch P_1 eine horizontale mit Y parallele Brennlinie.

Ein gegen X_1 convergirender, oder von X_1 divergirender Strahlenkegel, welcher längs einem Kreise $Y_0^2 + Z_0^2 = \delta^2$ eintritt, verwandelt sich in eine windschiefe Fläche, deren Gleichung die folgende ist:

$$(c) \quad \frac{Y^2}{\delta^2 \left(1 - \frac{X}{P}\right)^2} + \frac{Z^2}{\delta^2 \left(1 - \frac{X}{P_1}\right)^2} = 1.$$

In Betreff dieser Fläche gelten die in § 5. (7) gemachten Bemerkungen.

Die Netzhaut des Auges sei eine Ebene $X = \Pi$; wo sie auch stehen mag, ihr Schnitt mit der Fläche (c) ist elliptisch und am besten scheint noch eine erträgliche Perception des leuchtenden Punktes möglich zu sein, wenn $\Pi = \frac{1}{2}(P + P_1)$, d. h. wenn die Netzhaut die sogenannte Brennstrecke PP_1 halbirt, weil der immerhin noch elliptische Durchschnitt hier am wenigsten von einem kleinen Kreise abweicht.

Wir denken uns nun vor dem Auge eine sehr dünne paraboloidische Linse mit parallelen Hauptschnitten centrisch aufgestellt und untersuchen die Modification, welche ein ursprünglich gegen einen Punkt x_1 der Linsenachse gerichtetes Strahlenbüschel, nachdem es die Linse verlassen hat, im Auge erfährt. Zur Bestimmung irgend eines die Linse verlassenden Strahls haben wir nach § 4. (5) und § 5. (6_{bis}) die Gleichungen

$$(d) \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{x_1} + (n-1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\varrho}\right), \; \frac{1}{p_1} = \frac{1}{x_1} + (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{\varrho_1}\right),$$

$$(e) \quad \eta = y_0\left(1 - \frac{\xi}{p}\right),\ \zeta = z_0\left(1 - \frac{\xi}{p_1}\right).$$

Das Auge befinde sich hinter O' in einem mässigen Abstand $O'\Omega = \Delta$, die Achsen x, ξ, X fallen zusammen und überdiess sei ΩY parallel Oy. Die Coordinaten des Eintritts in das Auge, die oben mit $X_0 Y_0 Z_0$ bezeichnet wurden, sind jetzt

$$X_0 = 0,\ Y_0 = y_0\left(1 - \frac{\Delta}{p}\right),\ Z_0 = z_0\left(1 - \frac{\Delta}{p_1}\right).$$

Als Coordinaten des beliebigen Punkts, mit Hülfe dessen nach Fig. 1 die Richtung des gebrochenen Strahls im Auge bestimmt wird, nehmen wir den Punkt, in welchem der einfallende Strahl (e) die Netzhaut $X = \Pi$ treffen würde; wir haben daher für die oben eingeführten Grössen $X_1 Y_1 Z_1$ zu setzen:

$$X_1 = \Pi,\ Y_1 = y_0\left(1 - \frac{\Delta + \Pi}{p}\right),\ Z_1 = z_0\left(1 - \frac{\Delta + \Pi}{p_1}\right).$$

Diese und die vorhergehenden Werthe in die Ausdrücke (b) gesetzt, erhalten wir die Gleichungen des im Auge gebrochenen Strahls, welcher zu einem Strahle gehört, der bei (x_0, y_0, z_0) eintretend, ursprünglich gegen einen Punkt x_1 der Achse gerichtet war. Diese Gleichungen vereinfachen sich, wenn man die Brennweiten F und F_1 des freien Augs für Parallelstrahlen im horizontalen und vertikalen Hauptschnitt desselben einführt. Es ist nämlich nach (a) für $X_1 = \Pi$

$$(a') \quad \frac{1}{P} - \frac{1}{N\Pi} = \frac{N-1}{NR} = \frac{1}{F},\ \frac{1}{P_1} - \frac{1}{N\Pi} = \frac{N-1}{NR_1} = \frac{1}{F_1};$$

hiemit werden die Gleichungen des gebrochenen Strahls:

$$(f) \quad \begin{cases} Y = y_0\left\{1 - \frac{\Delta}{p} - \left[\frac{1}{F}\left(1 - \frac{\Delta}{p}\right) + \frac{1}{Np}\right]X\right\} \\ Z = z_0\left\{1 - \frac{\Delta}{p_1} - \left[\frac{1}{F_1}\left(1 - \frac{\Delta}{p_1}\right) + \frac{1}{Np_1}\right]X\right\}. \end{cases}$$

Man ersieht hieraus, dass das Lichtbüschel im Auge im Allgemeinen tetraëdrisch modificirt ist, denn man erhält

zwei Brennlinien, die eine vertikal im Abstand Π_1 von Ω, gegeben durch die Gleichung

$$(g_1) \quad \frac{1}{\Pi_1} = \frac{1}{F} + \frac{1}{N(p-\Delta)};$$

die andere horizontal im Abstande Π_2, bestimmt durch

$$(g_2) \quad \frac{1}{\Pi_2} = \frac{1}{F_1} + \frac{1}{N(p_1-\Delta)}.$$

Soll aber das Auge durch die Linse corrigirt werden, so muss $\Pi_1 = \Pi_2 = \Pi$ sein, also

$$(h) \quad \begin{cases} \frac{1}{\Pi} = \frac{1}{F} + \frac{1}{N(p-\Delta)} = \frac{1}{F_1} + \frac{1}{N(p_1-\Delta)}, \\ \frac{1}{p-\Delta} - \frac{1}{p_1-\Delta} = N\left(\frac{1}{F_1} - \frac{1}{F}\right). \end{cases}$$

Diese Gleichungen können wir die Bedingungen des Stigmatismus der Combination der beiden astigmatischen Systeme nennen; sie liefern, wenn die Grössen $FF_1N\Delta$ als gegeben angesehen werden, p und p_1, folglich, wenn auch x_1, n als bekannt angenommen werden, mit Hülfe von (d) zwei Gleichungen, denen die vier Krümmungshalbmesser entsprechen müssen, woraus hervorgeht, dass der Stigmatismus durch die verschiedensten Linsenformen zu erreichen ist.

Hält man sich aber an sphärisch-cylindrische Gläser, so lassen sich mit Hülfe der Gleichungen (h) und (d) die Elemente der Linse sofort bestimmen. Stellt man die Cylinderachse vertikal, so ist $r_1 = \infty$, $\varrho_1 = \varrho$, folglich

$$(d_1) \quad \frac{1}{p_1} = \frac{1}{x_1} - \frac{n-1}{\varrho}, \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{x_1} + (n-1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\varrho}\right);$$

ist sie horizontal, also $r = \infty$, so hat man

$$(d_2) \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{x_1} - \frac{n-1}{\varrho}, \quad \frac{1}{p_1} = \frac{1}{x_1} + (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{\varrho}\right).$$

Erlaubt man sich, den Abstand Δ zwischen Linse und Auge zu vernachlässigen, so werden die Bedingungen des Stigmatismus zu folgenden:

$$(h_1) \quad \frac{1}{\Pi} = \frac{1}{F} + \frac{1}{Np} = \frac{1}{F_1} + \frac{1}{Np_1}, \quad \frac{1}{p} - \frac{1}{p_1} = N\left(\frac{1}{F_1} - \frac{1}{F}\right).$$

GENERAL LIBRARY University of MICHIGAN

Bei der sphärisch-cylindrischen Linse fällt nun in dem Werthe für $\frac{1}{p} - \frac{1}{p_1}$ die Grösse x_1 sammt dem Kugelhalbmesser ϱ heraus und man erhält hierfür nach (d_1), $\frac{n-1}{r}$, und nach (d_2), $-\frac{n-1}{r_1}$, folglich bei vertikaler Cylinderachse

$$(h_2) \quad \frac{n-1}{r} = N\left(\frac{1}{F_1} - \frac{1}{F}\right), \quad \frac{1}{x_1} - \frac{n-1}{\varrho} = N\left(\frac{1}{\Pi} - \frac{1}{F_1}\right);$$

und bei horizontaler Cylinderachse

$$(h_3) \quad \frac{n-1}{r_1} = -N\left(\frac{1}{F_1} - \frac{1}{F}\right), \quad \frac{1}{x_1} - \frac{n-1}{\varrho} = N\left(\frac{1}{\Pi} - \frac{1}{F}\right).$$

Es giebt daher immer zwei sphärisch-cylindrische Gläser, welche das Auge corrigiren; der Halbmesser des Cylinders ist schon durch die Grössen $nNFF_1$ vollständig bestimmt, für beide Gläser von gleichem absolutem Werth, aber je nach der Orientirung der Cylinderachse von verschiedenem Vorzeichen, also z. B. für $F > F_1$ r positiv, r_1 negativ. Von den zwei durch (h_2) und (h_3) bestimmten Formen wird man diejenige vorziehen, welche dem Kugelhalbmesser absolut genommen den grösseren Werth giebt. Nach § 4. ist es übrigens gleichgültig, welche der Linsenflächen dem Auge zugekehrt ist, wenn nur die Cylinderachse die richtige Stellung hat.

Es sei z. B. $n = 1{,}5$, $N = 1{,}34$, ferner, Alles in Millimetern ausgedrückt, $F = 24$, $F_1 = 20$, $\Pi = 22$, $x_1 = -200$, also der Lichtpunkt vor dem Auge gelegen; dann ergiebt sich aus (h_2) $r = 44{,}8$, $\varrho = 458{,}3$, (Fig. 14, 1)

aus (h_3) $r_1 = -44{,}8$, $\varrho = -49{,}6$, (Fig. 14, 2 um 90^0 gedreht).

Man ersieht aus den Formeln (h_2) und (h_3), sowie aus dem Beispiele, dass es im Allgemeinen nicht zulässig ist, von den vier Formen der sphärisch-cylindrischen Gläser irgend eine auszuschliessen, wenn man sich vornimmt, den Astigmatismus allezeit mit solchen Gläsern zu corrigiren. Wir haben aber auch in den bicylindrischen Gläsern ein

Mittel diess zu bewirken. Es genügt hier den Fall zu betrachten, wo die Achse der cylindrischen Eintrittsflächen vertikal steht, weil die Linse durch Drehung um die y oder z Achse um 180^0 in die andere gleichwerthige Stellung kommt. Wir haben in diesem Falle $r_1 = \infty$, $\varrho = \infty$, daher aus (d) und (h_1)

$$(i) \quad \frac{n-1}{r} = N\left(\frac{1}{\Pi} - \frac{1}{F}\right) - \frac{1}{x_1}, \quad \frac{n-1}{\varrho_1} = \frac{1}{x_1} - N\left(\frac{1}{\Pi} - \frac{1}{F_1}\right).$$

Für das obige Beispiel erhalten wir $r = 49{,}6$, $\varrho_1 = 458{,}3$. (Fig. 13, 1).

Einfach-cylindrische Linsen können nicht zur allgemeinen Lösung der Aufgabe dienen. Stehen z. B. die Cylinderachsen vertikal, so ist $r_1 = \infty$, $\varrho_1 = \infty$ und wenn man $(n-1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\varrho}\right) = \frac{1}{f}$ setzt, erhält man

$$(k) \quad \frac{1}{p} - \frac{1}{p_1} = N\left(\frac{1}{F_1} - \frac{1}{F}\right) = \frac{1}{f}.$$

Hiemit ist die positive oder negative Brennweite der Linse schon völlig bestimmt. Weil aber für diese Linsen (§ 11.) $p_1 = x_1$ ist, so folgt aus (h_1)

$$(l) \quad \frac{1}{x_1} = N\left(\frac{1}{\Pi} - \frac{1}{F_1}\right)$$

und hier ist x_1 derjenige Abstand für welchen Stigmatismus eintritt.

Für horizontale Lage der Cylinderachsen ist $r = \infty$, $\varrho = \infty$, daher, wenn $(n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{\varrho_1}\right) = \frac{1}{f_1}$ gesetzt wird

$$(k_1) \quad \frac{1}{p} - \frac{1}{p_1} = N\left(\frac{1}{F_1} - \frac{1}{F}\right) = -\frac{1}{F_1}$$

$$(l_1) \quad \frac{1}{x_1} = N\left(\frac{1}{\Pi} - \frac{1}{f}\right).$$

Für das obige Beispiel findet man aus (k) (l) $f = 89{,}55$, $x_1 = -164{,}2$, aus (k_1) (l_1) $f_1 = -89{,}55$, $x_1 = 197{,}0$; im ersten Fall muss daher das Licht von einem Punkte x_1 vor dem Auge divergiren, im zweiten Fall nach einem Punkte x_1 hinter dem Auge convergiren, wenn Stigmatismus eintreten soll.

Zum Schluss bemerke ich noch, dass die hier hauptsächlich in Betracht kommenden Ausdrücke (g_1) (g_2) einfach dadurch gefunden werden können, dass man der Reihe nach einen ebenen Strahlenfächer durch Linse und Auge verfolgt, welcher einmal im horizontalen und dann im vertikalen Hauptschnitt liegend angenommen wird; eine ähnliche Bemerkung gilt auch für die paraboloidische Linse (§ 5.), an welcher die Hauptschnitte der Grenzflächen zusammenfallen.